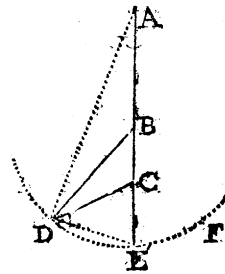


IX. *Theorema Spherico-Catoptricum Universale. Per D. Humfredum Ditton.*

FOcorum Inventio tum in Dioptricâ, tum in Catoptricâ, ex Calculo pro curvis Causticis facili modo sequitur. Nil enim aliud agendum est, quam ut locus in quo Radius (ad Curvam, vel Refringentem, vel Reflectentem perpendicularis) Curvam Diacausticam vel Catacausticam tangit, cognitus habeatur. De quâ methodo videatur *D. Hayes* Liber Fluxionum nuper editus : nos ex aliis principiis, rem (ad Catoptricam quatenus spectat) aggrediemur.

Sit DEF Speculi Spherici concavi portio, cujus Centrum *B*, semidiameter *BE* vel *BD*: Sit etiam *A* punctum radians in axe collocatum, a quo profluat radiosa linea *AD*, quæ ad punctum *D* reflectatur in *D.C*. Investiganda jam est Foci *C*, a speculi vertice *E* distantia.



Notandum vero, quod punctum *D* ipsi *E* proximum supponimus. Radii enim remotiores oculum (quem in axe *AE* constituimus) præterlabuntur, nec ad imaginis visionem aliquid faciunt. Porro, propter arcum *DE* indefinite parvum, anguli *DAB*, *ADB* (ut & ipsorum summa *DBC*) sunt quam minimi, ac idcirco eandem habebunt inter se rationem, quam ipsis latera opposita : quo ratiocinii principio posito, ad Theorema Dioptricum pervenit, *D. Halleus* Geometriæ Professor apud Oxonienses.

Hiscæ premissis, sit $AB = b$, $ED = BE = r$, $BC = z$, $CE (= r - z, \text{ sed brevitatis causa ponatur}) = f$. Quan-
Hiscæ

titates z & r cognitæ sunt (dantur enim semidiameter speculi, ac puncti lucidi a vertice distantia) z vero & f quæsitæ ac incognitæ. Jam in Triangulo DAB, erit \sphericalangle DAB: \sphericalangle ADB :: r : b . Item in Triangulo DBC, \sphericalangle BDC = \sphericalangle ADB, ex naturâ Reflexionis, & \sphericalangle DBC = \sphericalangle DAB + \sphericalangle ADB, ex Elem. Eucl. Ergo cum \sphericalangle DBC sit ut $r + b$, & \sphericalangle BDC ut b ; erit etiam \sphericalangle DBC: \sphericalangle BDC :: $r + b$: b , & (quod ex principio supra memorato consequitur) DC: BC :: $r + b$: b . Sed quoniam punctum D ipsi E proximum est, erit DC ipsi CE equalis estimanda, ergo CE: BC :: $r + b$: b ; hoc est f : z :: $r + b$: b , & (comparando Antecedentium & Consequentium summas ad Antecedentes) $f + z$: f :: $r + z$: b : $r + b$; sed $f + z = r$, ergo r : f :: $r + z$: b : $r + b$, ergo $f = \frac{r r + r b}{r + r b}$. Q: E: I.

Si ponatur $r + b (= AE) = d$, Theorema in formam contractiorem rediget, & sic stabit $f = \frac{r d}{2 d - r}$. Sed utrovis modo, focorum inventioni, quæcunq; tandem sit, vel Speculi forma, vel radiorum conditio, aptum evadet.

Coroll. I. Erit $z d = d f - r f$, sive $AE \times BC = AB \times CE$, vel quod idem est, linea AE harmonicè dividitur in punctis A, B, C, E; nam prædicta Rectangulorum equalitas, lineæ secundum proportionem harmonicam sectæ, propria est. Patet hæc veritas: Est enim $f = \frac{d r}{2 d - r}$, & $z = r - f = r - \frac{d r}{2 d - r}$, unde valores hosce substituendo, Equatio manifesta fiet. Adeo ut in omni Speculo Spherico, lineæ DA, DB, DC, DE, sunt Harmonicales; & Punctum radians, Centrum, Focus, Vertex sunt puncta divisionem Harmonicam efficientia.

Coroll. II. 1^{ma} Posito $d > r$; erit ex calculo f , sive $\frac{r d}{2 d - r} > \frac{r}{2}$ semper. Hoc est, si puncti radiantis distantia major sit Semidiametro Speculi, foci distantia semper major erit quarta parte Diametri.

Item, erit $\frac{r d}{2 d - r} < r$ semper. Hoc est, distantia foci semper erit minor speculi semidiametro.

2^{do}. Si ponatur $d = r$, erit $\frac{r d}{2 d - r}$, sive $f = r$. Hoc est, si punctum radians in centro speculi constituitur, Imago ejus ibi cum eo unietur.

3^a Si ponatur $d < r$, tum ipsius f expressio erit vel positiva vel negativa vel infinita, prout quantitas $2d$ quantitate r vel major est vel minor, vel ei equalis.

Si $2d > r$, hoc est, si $d > \frac{r}{2}$, tum punctum radians & focus ad eandem partes speculi jacent.

Si $2d < r$, vel $d < \frac{r}{2}$, tum Imago, in axe ultra speculi verticem producta, fita est.

Si $2d = r$, vel $d = \frac{r}{2}$, Imago infinitè distat, sive radius reflexus, axi parallelus evadit.

Coroll. III. Calculi hujus ope expedite determinari potest, quomodo objecti radiantis (speculi respectu) motui, ipsius Imaginis motus respondet. Sit (ut an ea) Imaginis a speculo distantia $= \frac{dr}{2d-r}$, quando objecti distantia est d . Mutetur jam utcumque objecti distantia, & ex d , fiat nd , quantitate n Numerum vel integrum vel fractum designante: & sic loco prioris Equationis, $f = \frac{dr}{2d-r}$, habebimus pro Novo Foco aſſam Equationem, $F = \frac{ndr}{2nd-r}$. Et quidem si n Numerum integrum exprimere supponatur, secunda hæc objecti distantia primâ major erit, si vero sit fractus, tum minor erit primâ.

Hiscæ positis, si $d > r$, & n sit integer, erit $F < f$, id est, erit $\frac{ndr}{2nd-r} < \frac{dr}{2d-r}$, sive $2nddr - ndr < 2nddr - dr^2$, quod manifestum est. Hoc est, si in speculo concavo objecti distantia major sit semidiametro, tum recedente objecto a speculo, Imago versus speculum accedet. Rursus, designet n Numerum fractum, & tunc reperietur $2nddr - ndr > 2nddr - dr^2$, sive $F > f$. Hoc est, accedente objecto ad speculum recedet Imago.

Supponatur jam $d < \frac{r}{2}$; ut & alia quæcunque sit objecti distantia non intelligatur ea semper minor esse quam $\frac{r}{2}$. Tum erunt $2nddr - ndr$, & $2nddr - dr^2$, quantitates negative, sive $ndrr - 2nddr$, & $dr^2 - 2nddr$ quantitates positivæ. Et quidem si n numero integro æquetur, erit $ndrr - 2nddr > dr^2 - 2nddr$, sive $F > f$; si vero a fractio sit, tum erit $ndrr - 2nddr < dr^2 - 2nddr$, sive $F < f$. Hoc est, si in speculo concavo objecti distantia minor sit speculi Diametri quartâ parte, tum recedente

dente objecto a speculo, recedet & Imago; vel accedente objecto versus speculum, Imago etiam accedet.

Et hæc omnia (quæ calculi vestigia premendo deduximus) Scholio unico conclusit, & in suâ Catoptricâ tradidit D. *Gregorius* apud Oxonienses Astronomiæ Professor.

Coroll. IV. In Equatione $f = \frac{dr}{2d-r}$, si ponatur d infinita, erit $f = \frac{r}{2}$; quæ regula est pro Radius parallelis, sive pro objecto radiante ad distantiam infinitam remoto. Idem sequetur,posito b infinito in Equatione $f = \frac{rr+rb}{r+2b}$.

Coroll. V. In Equatione $\frac{dr}{2d-r}$, mutato quantitatis r signo negativo in positivum, erit $f = \frac{dr}{2d+r}$; vel in equatione $f = \frac{r+br}{r+2b}$, mutato signo positivo in negativum, erit tunc $f = \frac{rb-r}{2b-r}$, quæ regulam exhibet pro speculo versus objectum radians *convexo*. Patet hæc mutatio signi; nam sicut in speculo concavo $d = r + b$, sic in convexo $d = b - r$.

Coroll. VI. In speculo convexo (stantibus quæ ad Cor. III. annotavimus de Concavo) patebit quod (si n sit numerus integer) $2rndd + ndr > 2rndd + dr$; & (n fractione existente) quod $2rndd + ndr < 2rndd + dr$. Hoc est, quod recedente objecto a speculo, vel versus idem accedente Imago similiter recedet vel accedet.

Patet etiam in speculo convexo, objecto ad immensam usque distantiam retrocedente, Imaginem tamen illius non ultra Diametri partem quartam abire a vertice, sed ibi, in puncto, centrum inter & verticem medio, se sistere. Posito enim d vel b infinito, erit $f = \frac{dr}{2d}$ vel $\frac{br}{2b}$, id est (utrovis modo) $= \frac{r}{2}$.

Hicce adjungi potest & Problematis Catoptrici solutio, *Radiantis positionem respectu speculi dati talem invenire, ut radians ad ipsius Imaginem a speculo factum, datam habent rationem.* Sit Ratio data $r : q$. & symbolo O designetur Objectum, I Imago, d distantia objecti, & f imaginis a speculo. Jam (quod demonstravit D. *Greg.*) erit $O : I :: d : f$, (hoc est Objectum & Imago sunt distantis suis a speculi vertice directè proportionales) & quoniam requiritur ut sit $O : I :: r : q$, debet

(1814)

debet etiam esse $d : f :: r : q$, vel (ipsius f expressionem scribendo) $d : \frac{dr}{2d-r} :: r : q$, unde $2ddq - rdq = rdr$, & $2dq = rr + qr$, & $d = \frac{rr+qr}{2q}$. Unde quoniam $dr = \frac{rr+rrq}{2q}$, & $2d - r = \frac{rr}{q}$, erit etiam f sive $\frac{dr}{2d-r} = \frac{rr+rrq}{2q}$ $\frac{rr}{q} = \frac{qrrr+qqr}{2qrr} = \frac{r+q}{2}$, quæ est ipsius f , sive imaginis a speculo distantia, huic objecti distantiae congrua. Ergo si statuatur objectum ad distantiam $\frac{rr+rq}{2q}$, ipsius Imago facta ad distantiam $\frac{r+q}{2}$ ei comparata, eandem habebit rationem, quam $q : r$, sive erit $O : I :: r : q$. Nam $O : I :: d : f :: \frac{rr+rq}{2q} : \frac{r+q}{2} :: r : q$. $Q : E : I$.

Objectum Radians & Imaginem hic tanquam lineas consideravimus. Si enim Superficies sunt, tum erit $O : I :: d : f$, & $d : f :: r : q$, sic ut ultimo deveniatur ad Equationem $4dd - 4qdr = r^2 - qrr$, e qua radice d valor, Methodis vulgaribus facillimè inveniri potest.

L O N D O N,

Printed for Sam. Smith and Benj. Walford, Printers to the Royal Society,
at the *Princes Arms* in *St Paul's Church-yard*, 1705.